

1. Factorización LU

1.1. Ejemplo

(Autor: Matias Hadad)

Aplicar factorización LU a la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Aplicamos eliminación Gaussiana a la matriz $\mathbf{A}$ para obtener la matriz $\mathbf{U}$ y armamos las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{P}$ en cada paso. Se marcan en **rojo** los cambios en las matrices en cada paso.

- Comenzamos con las matrices en estado original:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $F_2 = F_2 - F_1$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $F_3 = F_3 - F_1$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $F_4 = F_4 - 2F_1$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $F_4 = F_4 - 2F_2$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $F_3 \Leftrightarrow F_4$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Utilizar la factorización LU hallada para resolver el sistema $\mathbf{A}x = b$ con:

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Resolución

- Calculamos $\mathbf{P}b$:

$$\mathbf{P}b = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Obtenemos c del sistema $\mathbf{L}c = \mathbf{P}b$ por sustitución progresiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Obtenemos x del sistema $\mathbf{U}x = c$ por sustitución regresiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$